

MAT 1739 - Cours 4 + début cours 5

Limites et continuité (Part II)

Automne 2019

Table des matières

2 Limite et fonctions (suite)	1
2.4 Opération sur les fonctions continues	1
2.5 Formes indéterminées	2
2.6 Limites en l'infini	3

2 Limite et fonctions (suite)

(Voir la fin des notes du cours 3 pour le tout début du cours 4)

Exemple. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 5 - x & \text{si } x \geq 1 \\ x + \lambda^2 - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$. Pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f est-elle continue ?

Réponse : Sur $] -\infty, 1[$, $f(x) = x + \lambda^2 - 1$, donc f est continue sur cet intervalle (une fonction affine est continue). De même, sur $[1, +\infty[$ on a $f(x) = 5 - x$, donc f est continue sur cet intervalle. Le seul problème potentiel est en $x = 1$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + \lambda^2 - 1) = 1 + \lambda^2 - 1 = \lambda^2.$$

D'une manière similaire, on trouve

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5 - x) = 5 - 1 = 4 = f(1).$$

La fonction f est continue en 1 si et seulement $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda^2 = 4$. On résout cette équation et on trouve $\lambda = 2$ ou -2 .
Conclusion : f est continue si et seulement si $\lambda = 2$ ou -2 .

2.4 Opération sur les fonctions continues

Proposition 1. Soient $a, \lambda \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions.

- (a) Si f et g sont continues en a , alors λf , $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a .
- (b) Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continues en a .
- (c) Si g est continue en a et f continue en $g(a)$, alors la fonction $x \mapsto f(g(x))$ (appelée la fonction composée de f et g) est continue en a .

Exemples.

- La fonction $x \mapsto x^2 + \exp(x)$ est une fonction continue sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions continues sur \mathbb{R} (la fonction carrée $x \mapsto x^2$ et la fonction exponentielle \exp).
- La fonction $x \mapsto x^2 \times \sin(x)$ est continue sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions continues sur \mathbb{R} (fonction carrée et fonction \sin).
- La fonction $x \mapsto \cos(x^3 - 1)$ est continue sur \mathbb{R} par *composition* des fonctions continues continues $f = \cos$ et $g : x \mapsto x^3 - 1$.

Début Cours 5.

Remarque. Le fait de travailler avec des fonctions continues permet de calculer des limites par substitution en utilisant le fait que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ si f est continue en a .

Exemple. Calculez les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^4 - 5x$.

Réponse : On a $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^4 - 5x = 3 \times 2^4 - 5 \times 2 = 38$ par continuité de $x \mapsto 3x^4 - 5x$ (on “remplace” donc x par 2).

- $\lim_{x \rightarrow 2} \cos(3x^4 - 5x)$.

Réponse : La fonction $f : x \mapsto \cos(3x^4 - 5x)$ est continue en $x = 2$ (par composition de fonction continue). On a donc $\lim_{x \rightarrow 2} \cos(3x^4 - 5x) = \cos(3 \times 2^4 - 5 \times 2) = \cos(38)$ (on “remplace” x par 2).

2.5 Formes indéterminées

Il existe certaines formes de limite où il n'est pas possible de conclure directement en utilisant des opérations sur les limites, ce sont les formes dites “indéterminées” :

- Indétermination de la forme $\frac{0}{0}$.
- Indétermination des formes $\frac{\infty}{\infty}$ et $0 \times \infty$.
- Indétermination de la forme $\infty - \infty$.

Il existe d'autres formes indéterminées plus “camouflée” qui se ramènent aux formes précédentes en prenant l'exponentielle ou le logarithme népérien (par exemple la forme $1^{\pm\infty}$ qui équivaut à la forme $0 \times \infty$ en appliquant le logarithme népérien).

Exemple. Calculez la limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$.

Première tentative : On a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2x + 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x - 1} = \frac{0}{0}.$$

On trouve une forme indéterminée : on ne peut pas conclure avec les calculs précédents.

Pour parvenir à lever l'indétermination, on utilise une ou plusieurs des techniques suivantes :

- On essaye de transformer l'écriture (factorisation, développement, utilisation d'une expression conjuguée, etc.)
- On utilise les résultats sur les croissances comparées des fonctions usuelles (voir plus tard)
- On utilise les opérations sur les limites (voir §2.2).

Par exemple, en reprenant l'exemple précédent, on peut factoriser le numérateur $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. On obtient alors

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0.$$

2.6 Limites en l'infini

Soit $c \in \mathbb{R}$. On peut calculer les limites de la forme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ en utilisant les propriétés suivantes :

- (a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} c^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < c < 1 \end{cases}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} c^x = \begin{cases} 0 & \text{si } c > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < c < 1 \end{cases}$.

On a aussi les règles suivantes :

- $+\infty + c = +\infty$
- $+\infty + \infty = +\infty$ et $-\infty - \infty = -\infty$.
- $+\infty - \infty =$ forme indéterminée
- $+\infty \times c = \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0 \\ \text{forme indéterminée} & \text{si } c = 0 \end{cases}$

Exemples.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \right)^3 = (+\infty)^3 = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ car $e \approx 2.718 \dots > 1$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 + 12x^2 = -\infty + \infty$, c'est une forme indéterminée.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 + 12x^2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-5 + \frac{12}{x} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \right) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-5 + \frac{12}{x} \right) \right) \\ &= (+\infty) \times (-5) = -\infty. \end{aligned}$$

En général, il est souvent avisé de **factoriser par le terme dominant** pour calculer des limites :

Proposition 2. Soit f une fonction polynomiale. Alors

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\text{terme dominant de } f),$$

le terme dominant de f étant le terme de plus haute degré (ou puissance).

Exemple. Soit $f : x \mapsto -2x^5 + 2x^3 - 7$. Le terme dominant de f est $-2x^5$ (plus haute puissance).

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^5 = (-2) \times (+\infty) = -\infty$.

Exemple. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2+2}{x^3-1} = \frac{+\infty}{+\infty}$: forme indéterminée. On procède ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2+2}{x^3-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(7+\frac{2}{x^2})}{x^3(1-\frac{1}{x^3})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{7+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} \\ &= 0 \times \frac{7+0}{1-0} = 0. \end{aligned}$$

Proposition 3. Soient p et q deux fonctions polynomiales (avec q qui n'est pas la fonction nulle).
Alors

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{terme dominant de } p}{\text{terme dominant de } q}.$$

Exemple.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 + 3x - 1}{3x^4 - 13} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$